EF2 : MATHÉMATIQUES II

Durée : 1 heure **Coefficient : 1**

EPREUVE FACULTATIVE

—— Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices. ——

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

—— Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet. ——

⇨ ***RESPECT DES CONSIGNES** (arrondis, échelles, ...) : 1 point*

EXERCICE N°1 **(7 points)**

Une entreprise fabrique des jetons pour distributeurs de boisson.
Un échantillon de la production a été constitué en prélevant au hasard 200 jetons et en contrôlant leurs diamètres (en millimètres). L'importance de la production permet d'assimiler le tirage de 200 jetons à un tirage avec remise.
Pour cet échantillon, on obtient pour moyenne des diamètres $\bar{x} = 24$ et pour écart-type 0,5.

1. Pour l'ensemble des jetons fabriqués, on note m le diamètre moyen et s l'écart-type.
   A partir de l'échantillon des 200 jetons, on note m_0 l'estimation ponctuelle de m, et s_0 l'estimation ponctuelle de s, arrondie au millième. Justifier que $m_0 = 24$ puis que $s_0 = 0{,}501$.

2. Déterminer, arrondi au centième, le réel t tel que : $2\Pi(t) - 1 = 0{,}95$. (La notation $\Pi(t)$ est celle utilisée dans le formulaire pour la table de la loi normale centrée réduite.)

3. *On admet que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de taille 200 choisi au hasard et avec remise dans la population, associe la moyenne des diamètres des jetons de l'échantillon, suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{s}{\sqrt{200}}$, où m et s sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la population totale.*

   Déterminer une estimation de m par un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% en prenant pour valeur de s l'estimation ponctuelle obtenue à la question 1. (On donnera les bornes de cet intervalle avec des valeurs arrondies au millième.)

EXERCICE N°2 **(12 points)**

Le but de cet exercice est de donner quelques applications d'un développement limité.

On rappelle le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $u : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ en zéro est donné par :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

On note C_u la courbe représentative de la fonction u dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. **Première application**

   Cette première application est un « Vrai-Faux ». Aucune justification n'est demandée. À partir du développement limité précédent, ou en utilisant d'autres méthodes, déterminer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. (Une absence de réponse à une affirmation sera moins pénalisée qu'une réponse fausse.)

   Affirmation A :
   La courbe C_u admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation : $y = -t + 1$.

   Affirmation B :
   La courbe C_u est au dessous de la droite d'équation : $y = -t + 1$ lorsque t est voisin de zéro.

2. **Deuxième application**

   Déduire du développement donné de $u : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, le développement limité à l'ordre 2 en zéro des fonctions $v : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ et $w : t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$. Justifier rapidement ces résultats.

3. **Troisième application**

   On considère l'intégrale : $I = \int_0^{0,1} (1-x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

   a) En faisant figurer sur la copie des étapes de calcul, calculer par intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale I.

   b) En utilisant le résultat précédent ou en utilisant les possibilités de calcul intégral de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} près de cette intégrale.

   c) Une calculatrice donne pour résultat approché à 10^{-4} près de l'intégrale $J = \int_0^{0,1} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} \mathrm{d}x$ la valeur 0,1001.
   Comparer ce résultat à celui du b). Commenter la réponse.