E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (4 points)

Les questions 1) *et* 2) *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1) On considère l'ensemble $E = \{x_1\ , x_2\ , x_3\}$ et l'application f de E dans E définie par

$$f(x_1) = x_2\ ,\ f(x_2) = x_3\ ,\ f(x_3) = x_2\ .$$

a) Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de l'ensemble E.

b) L'application f est-elle une injection de E dans E ? (Justifier).

c) L'application f est-elle une surjection de E sur E ? (Justifier).

2) On considère le graphe orienté G, de sommets x_1, x_2 et x_3, tel que les successeurs de x_1, x_2 et x_3 sont respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$.

a) Donner une représentation géométrique de ce graphe.

b) On note M la matrice d'adjacence de G.

On constate que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Expliquer pourquoi la première ligne de M est 0 1 0.

c) On note $\hat{G}$ la fermeture transitive de G.

On rappelle que $\hat{G}$ est le graphe obtenu en conservant les sommets de G et en ajoutant, s'ils n'existent pas dans G, les arcs (x_i, x_j) lorsqu'il existe un chemin d'origine x_i et d'extrémité x_j dans le graphe G.

Tracer une représentation géométrique de $\hat{G}$ et vérifier que la matrice d'adjacence $\hat{M}$ du graphe $\hat{G}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

Vérifier que $\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$, où $\oplus$ représente l'addition booléenne des matrices.

EXERCICE N° 2 (6 points)

Dans une compagnie d'assurance, on a pu constater que sur les 1 200 assurés, 60 avaient envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année.
On dira dans tout cet exercice que ces 60 dossiers sont de *"type DS "*.

On prélève au hasard et avec remise n dossiers parmi les 1 200 dossiers des assurés.
X est la variable aléatoire donnant, parmi les n dossiers prélevés, le nombre de dossiers de *"type DS "*.

Les probabilités demandées seront données sous forme décimale, arrondies à 10^{-2}.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Donner les paramètres de cette loi.

2) ***Dans cette question, on prend n* = 10.** Calculer les probabilités :

a) pour qu'un seul dossier soit de *"type DS "* ;

b) pour qu'il y ait, parmi ces 10 dossiers, au moins un dossier de *"type DS "*.

3) ***Dans cette question, on prend n* = 60.**

On admet que la loi de probabilité X peut être approchée par une loi de Poisson. Soit Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre de la loi de Poisson suivie par Y.

b) Quelle est la probabilité $P(Y \geq 2)$?

4) ***Dans cette question, on prend n = 200.***

On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi normale. Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

a) Déterminer les paramètres de la loi normale suivie par Z.

b) Calculer les probabilités suivantes $P(Z \leq 9)$ et $P(Z \geq 15)$.

c) Calculer une valeur approchée de $P(X = k)$ revient à calculer $P(k - 0{,}5 \leq Z \leq k + 0{,}5)$, où intervient la correction de continuité.

A l'aide de ce renseignement, calculer une valeur approchée de la probabilité $P(X = m)$, où *m* est l'espérance mathématique de la variable *X*.

EXERCICE N° 3 (10 points)

Les parties B *et* C *de cet exercice peuvent ête traitées indépendamment de la partie* A.

Une étude statistique a permis d'établir qu'à partir du début de l'année 1990, le taux des ménages équipés d'un ordinateur dans une ville V est donné approximativement, en fonction du nombre *t* d'années écoulées depuis le début de l'année 1990, par

$$f(t) = \frac{1}{1 + k\,\mathrm{e}^{-at}}$$, où *k* et *a* sont deux nombres réels positifs.

D'après cette étude, on sait qu'au début de l'année 1990, 20 % des ménages étaient équipés d'un ordinateur et qu'au début de l'année en 1999, 40 % des ménages l'étaient.

Partie A

Détermination de *k* et *a*.

1) Montrer que *k* et *a* sont solutions du système $\begin{cases} 1 + k = 5 \\ 1 + k\mathrm{e}^{-9a} = 2{,}5 \end{cases}$.

2) Résoudre ce système, puis donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de *a*.

Partie B

Etude de la fonction *f*.

On admet que la fonction *f* est définie pour tout nombre réel *t* appartenant à l'intervalle [0;+∞[par

$$f(t)=\frac{1}{1+4e^{-0,11t}}\ .$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

(unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1) **a)** Etudier la limite de f en $+\infty$ et en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote, notée (Δ), dont on donnera une équation.

b) Montrer que, pour tout nombre réel *t* appartenant à l'intervalle [0;+∞[,

$$f'(t)=\frac{0,44\,e^{-0,11t}}{\left(1+4\,e^{-0,11t}\right)^2}\ .$$

c) Dresser le tableau de variation de *f*.

d) Tracer (Δ) et $\mathcal{C}$ (placer en particulier les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 20 et 40).

e) Résoudre algébriquement l'équation $f(t)=0,6$ et faire apparaître sur la figure les traits permettant de visualiser cette résolution.

2) On considère la fonction *F*, définie sur [0;+∞[par $F(t)=\frac{1}{0,11}\ln\left(4+e^{\,0,11t}\right)$.

Montrer que *F* est une primitive de *f* sur [0;+∞[.

Calculer la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[7;9]$, c'est à dire $\frac{1}{2}\int_7^9 f(t)\,dt$.

Partie C

Utilisation de résultats de la partie B.

On suppose que $f(t)$ est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2010, du taux des ménages équipés d'un ordinateur dans la ville V.

En utilisant cette approximation et des résultats obtenus à la partie B, déterminer :

1) le pourcentage des ménages équipés d'un ordinateur au début de l'année 2010 ;

2) l'année à partir de laquelle 60 % des ménages seront équipés d'un ordinateur ;

3) une valeur approchée du pourcentage moyen des ménages équipés d'un ordinateur entre le début de l'année 1997 et le début de l'année 1999.