BTS INFORMATIQUE DE GESTION

E2 : MATHÉMATIQUES I

SESSION 2005

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

EPREUVE OBLIGATOIRE

—— **Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.** ——

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

——Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.——

<u>Matériel autorisé</u> :

Calculatrice conformément à la circulaire n° 99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages, numérotées de 1/3 à 3/3.

EXERCICE N°1 (8 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Toutes les valeurs arrondies seront données à 10^{-3} près.

Partie A

En France, le nombre d'abonnements à l'Internet haut débit est donné, en millions, dans le tableau suivant :

Période	1er trimestre 2003	2ème trimestre 2003	3ème trimestre 2003	4ème trimestre 2003	1er trimestre 2004
x = rang de la période	1	2	3	4	5
y = nombre d'abonnements en millions	2,236	2, 450	2,790	3,524	4,406

(*) source ART : Autorité de Régulation des Télécommunications.

1) Recopier et compléter le tableau suivant, les résultats seront arrondis au millième.

x = rang de la période	1	2	3	4	5
$z = \ln y$					

2) Donner le coefficient de corrélation de z en x. Que peut-on en conclure ?

3) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.

4) En supposant la même progression de l'Internet haut débit, estimer le nombre d'abonnements en millions au troisième trimestre 2004.

5) Exprimer y en fonction de x sous la forme $y = Ae^{Bx}$ où A et B sont des réels arrondis au millième.

Partie B

En janvier 2003, une enquête dans une université a montré que 7 % des étudiants disposaient personnellement de l'Internet haut débit.
On interroge 100 étudiants. On suppose que l'effectif de l'université est suffisamment important pour que les interrogations soient considérées comme indépendantes.
Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'étudiants disposant de l'Internet haut débit.

1) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres ?

2) Calculer la probabilité $P(X = 5)$.

3) On admet que X peut être approchée par une variable X_1 suivant une loi de Poisson.
   a. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
   b. Déterminer les probabilités $P(X_1 = 5)$ et $P(X_1 > 7)$.
   c. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 5 étudiants disposant de l'Internet haut débit.

[redacted]

En septembre 2004, une enquête semblable a montré que 50 % des étudiants disposaient de l'Internet haut débit.
On interroge 100 étudiants. Soit Y la variable aléatoire qui mesure le nombre d'étudiants disposant de l'Internet haut débit.

1) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2) On admet que Y peut être approchée par une variable aléatoire Y_1 suivant une loi normale.
   a. Justifier que Y_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(50\ ;\ 5)$.
   b. Déterminer la probabilité $P(45 \leq Y_1 \leq 55)$.
   c. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 40 étudiants disposant de l'Internet haut débit. On calculera $P(Y_1 \geq 39{,}5)$.

[redacted] **(3 points)**

Le responsable du parc informatique d'une entreprise envisage l'acquisition de nouveaux ordinateurs. Pour s'équiper ce responsable s'adresse à une entreprise de vente de matériel informatique qui propose des configurations prédéfinies (ordinateur et périphériques).
On définit les critères suivants :

- a : la configuration comprend un graveur de DVD ;
- b : la configuration comprend une imprimante ;
- c : la configuration comprend un scanner.

Les contraintes d'équipement excluent les configurations avec graveur DVD mais sans scanner ainsi que les configurations sans graveur et sans imprimante.

1) Donner une expression booléenne E traduisant les conditions d'exclusion d'une configuration.

2) Dresser la table de Karnaugh de E.

3) Traduire l'expression booléenne $a\bar{b}c$ sous forme d'une phrase et préciser si la configuration considérée peut être acceptée.

4) A partir de la table de Karnaugh obtenue précédemment, donner l'expression F simplifiée traduisant l'acceptation d'une configuration.

5) La phrase « Les configurations acceptées sont celles qui comportent soit un graveur et un scanner soit pas de graveur et une imprimante » traduit-elle l'expression booléenne F ?

[redacted] **(9 points)**

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=3xe^{-x}$ et $g(x)=(3+x)e^{-x}$.

On notera **C** et Γ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec les unités graphiques suivantes : 1 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Déterminer la limite de g en $+\infty$, puis étudier les variations de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe **C** au point d'abscisse $x=0$. Tracer Δ.

4) Tracer les courbes **C** et Γ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.
   a. Résoudre $h(x)=0$.
   b. Étudier le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   c. En déduire les coordonnées exactes du point I d'intersection de **C** et Γ et les positions relatives de ces deux courbes.

6) Vérifier que la fonction H définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $H(x)=(2x-1)e^{-x}$ est une primitive de h sur cet intervalle.

7) Calculer en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes **C** et Γ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{3}{2}$. On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ et sa valeur arrondie au centième.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbf{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}\,t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}\,t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x'+b(t)\,x=0$	$f(t)=k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES* :

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

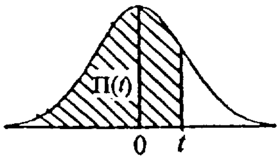
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $\qquad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\qquad \sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(*t*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$