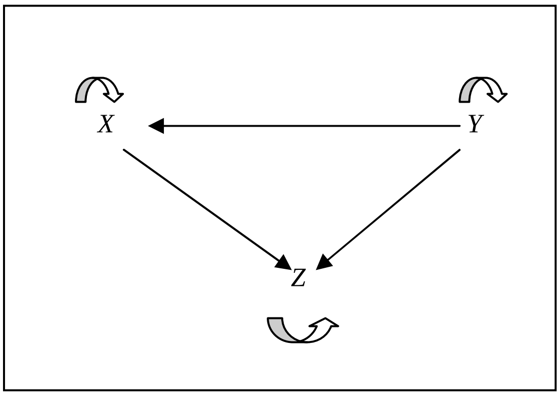
<table>
<tr><td colspan="4">CORRIGE DU SUJET : D BTS INFORMATIQUE DE GESTION SESSION 2003
EPREUVE DE MATHEMATIQUES E2</td></tr>
<tr><td></td><td>Question</td><td>Correction</td><td>Barème proposé</td></tr>
<tr><td>Exercice I</td><td>1)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$\overline{b}$</td><td colspan="2">b</td></tr>
<tr><td>$\overline{a}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{c}$</td><td colspan="2">c</td><td>$\overline{c}$</td></tr>
</table>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>On lit directement $\overline{E} = b.c$ d'où : $E = \overline{b.c} = \overline{b} + \overline{c}$ (d'après une des lois de Morgan).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2)a)</td><td>Interprétons chaque condition :
• « avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins de un an » : $a.\overline{b}$
• « avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente » : $\overline{a}.\overline{c}$
• « être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente » : $b.\overline{c}$
• « avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins de un an et avoir suivi une formation l'année précédente » : $\overline{a}.\overline{b}.c$
Une formation est mise en place si la personne vérifie l'un au moins des critères précédents, l'expression booléenne correspondante est :

$F = a.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c} + b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c = E.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2)b)</td><td>Comme $F = E$, on a aussi : $\overline{F} = \overline{E} = b.c$, les personnes qui ne pourront pas participer à la formation qualifiante sont celles qui sont au chômage depuis un an ou plus et qui ont suivi une formation l'année précédente.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exercice II</td><td>1)</td><td>$B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve également : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. B^3 est la matrice nulle.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>2)</td><td>Pour $n \geq 3$, $B^n = B^3 \times B^{n-3}$ avec $n-3 \geq 0$. Comme $B^3 = 0$, alors : $\forall n \geq 3, B^n = 0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>3)a)</td><td>Dans le développement du binôme, toutes les matrices $B^k, k \geq 3$ sont égales à la matrice nulle. Il reste donc les trois premiers termes dans ce développement.
On a bien : $\forall n \geq 3, \quad A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>3)b)</td><td>D'après le calcul précédent :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(car $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>4)a)</td><td>Notons X, Y, Z les trois sommets de ce graphe. On obtient :

</td><td>1</td></tr>
</table>

	4)b)	Le nombre de chemins de longueur 5 du sommet Y au sommet Z est l'élément situé à la deuxième ligne et à la troisième colonne de la matrice A^5. D'après la question 3)b) : $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il y a donc 15 chemins de longueur 5 allant du sommet Y au sommet Z.	1
Exercice III	A)1)	$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = 0{,}78$ et $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathrm{P}(B) = 0{,}95$.	0,5
	A)2)a)	Le circuit électronique est en panne au bout de 6 000 heures si les deux composants sont tombés en panne avant 6 000 heures. L'événement correspondant est $\overline{A} \cap \overline{B}$. Comme A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi et la probabilité demandée est : $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 0{,}78 \times 0{,}95 = 0{,}74$ en arrondissant le résultat à 10^{-2} près.	1
	A)2)b)	La probabilité pour que le circuit fonctionne sans panne au bout de 6 000 heures est : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26$ en arrondissant le résultat à 10^{-2} près. **Remarque** : on peut aussi calculer directement $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \ldots$	1
	A)3)a)	$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-1{,}5} \times \dfrac{1{,}5^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. La probabilité demandée est : $\mathrm{P}(X \leq 2) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2)$ $= \mathrm{e}^{-1{,}5} \times \left[1 + 1{,}5 + \dfrac{1{,}5^2}{2}\right] = 0{,}81$ valeur arrondie à 10^{-2} près.	1,5
	A)3)b)	On calcule $\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}5} = 0{,}78$ (valeur arrondie à 10^{-2} près).	0,5
	B)1)a)	Les deux fonctions f_1 et f_2 sont de la forme : $f: \quad t \to \mathrm{e}^{at}$. On sait que pour $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Avec $a = -0{,}25$ ou $a = -0{,}5$ on peut donc dire que les deux fonctions f_1 et f_2 sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ et donc aussi sur $[0, +\infty[$. Un calcul de dérivées et de signe ($f_1{}'(t) = -0{,}25 \times \mathrm{e}^{-0{,}25t} < 0$ et $f_2{}'(t) = -0{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}5t} < 0$) conduit au même résultat.	1
	B)1)b)	Il est normal que la probabilité pour qu'un circuit ne tombe pas en panne au bout de t milliers d'heures soit une fonction décroissante de t.	0,5
	B)1)c)	Dessin.	1
	B)2)a)	Voir dessin. On a dessiné la droite « horizontale » d'équation $y = 0{,}37$. Elle coupe C_1 au point d'abscisse $t_1 \approx 4000$ (le calcul donne $t_1 = -\dfrac{\ln 0{,}37}{0{,}25} = 3{,}977$ à 10^{-3} près par défaut soit approximativement 3977 heures) Elle coupe C_2 au point d'abscisse $t_2 \approx 2000$ (le calcul donne $t_2 = -\dfrac{\ln 0{,}37}{0{,}5} = 1{,}988$ à 10^{-3} près par défaut soit approximativement 1988 heures)	1
	B)2)b)	On a : $\forall t \geq 0, -0{,}5t \leq -0{,}25t \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5t} \leq \mathrm{e}^{-0{,}25t}$. La probabilité pour que le premier composant fonctionne sans panne au bout de t milliers d'heures est supérieure à la probabilité pour que le deuxième composant fonctionne au bout de t milliers d'heures. Le premier composant fonctionne donc le plus longtemps sans panne. Tout cela est obtenu par lecture graphique avec la courbe C_1 toujours au-dessus de la courbe C_2 pour $t \geq 0$.	1

Dessin pour les questions B)1)c) et B)2).